Лекция 3

Тема лекции:

Дифференциальные уравнения 1-го порядка. Основные понятия. Задача Коши. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Цель лекции:

Сформировать у студентов понимание основных типов дифференциальных уравнений первого порядка, их решения, постановки задачи Коши, а также освоить метод решения уравнений с разделяющимися переменными.

Основные вопросы:

1. ***Понятие дифференциального уравнения первого порядка.***
2. ***Общее и частное решение дифференциального уравнения.***
3. ***Задача Коши: формулировка и геометрический смысл.***
4. ***Метод решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.***

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее между собой независимую переменную x, искомую функцию y и ее производные.

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

Порядок старшей производной, входящей в уравнение, называется порядком уравнения.

<u>*Пример*</u>:

$x \cdot y' - 3y = 0$ – уравнение I порядка

$y'' + 5y' - 4y = 0$ – уравнение II порядка

Решением (интегралом) дифференциального уравнения называется функция $y = f(x)$, которая обращает исходное уравнение в тождество.

<u>*Пример*</u>:

$$y' + xy - x^2 = 0, \qquad x(y')^2 + e^x = 0, \qquad (y')^5 + e^{y^2} = 0,$$

$$xy'' - (y')^3 - y = 0, \qquad y'' - y' = 1, \qquad y^2 - y''' + x^5 = 0.$$

Общим решением дифференциального уравнения называется его решение, которое содержит столько произвольных постоянных, каков порядок уравнения.

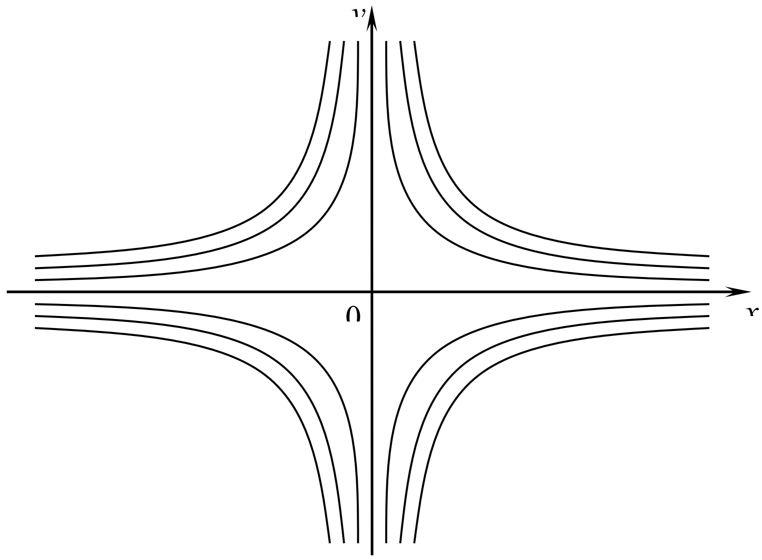
$y = \varphi(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ – общее решение дифференциального уравнения n-го порядка.

Если общее решение задано неявно, то его называют общим интегралом уравнения.

$$\Phi(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) \text{ – общий интеграл.}$$

Геометрически общий интеграл представляет собой семейство интегральных кривых, являющихся графиками решений уравнения.

<u>*Пример*</u>:



$$y' = \frac{y}{x}; \qquad\qquad y = \frac{c}{x} \quad - \quad \text{общее решение.}$$

Если в общем решении произвольным постоянным c_i придать конкретное значение, то мы получим частное решение дифференциального уравнения. Геометрически частное решение представляет собой одну интегральную кривую. Частных решений бесконечное множество, как и дифференциальных кривых.

<u>Дифференциальные уравнения первого порядка</u>.

$F(x, y, y') = 0$

Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка.

$y' = f(x, y)$

$y(x_0) = y_0$ – начальное условие

Совокупность дифференциального уравнения и начального условия называется задачей Коши.

ТЕОРЕМА 1 (Коши). *Пусть для уравнения* $y' = f(x,y)$ *выполняются два условия:*

1) $f(x,y)$ *непрерывна в некоторой области D плоскости xOy*,

2) *в области D ограничена.*

Тогда для любой точки $M_0(x_0, y_0) \in D$ *существует единственное решение* $y = \varphi(x)$ *уравнения* (2), *определенное в некотором интервале* $(a;b)$ *содержащем точку* x_0, *и удовлетворяющее условию* $y_0 = \varphi(x_0)$.

Дифференциальные уравнения с разделенными переменными**.**

Уравнением с разделенными переменными называются уравнения вида

$$f(x)dx = g(y)dy \quad \text{или} \quad M(x)dx + N(y)dy = 0.$$

Если дифференциалы функций равны, то сами функции отличаются на константу.

$$\int f(x)\,dx = \int g(y)\,dy \quad \text{или} \quad \int M(x)\,dx + \int N(y)\,dy = 0$$

<u>Пример</u>:

$$y^2 dy - 3e^x dx = 0 \qquad\qquad \frac{y^3}{3} - 3e^x = c.$$

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

$$y' = f(x)\cdot y(y) \quad \text{или} \quad M_1(x)\cdot N_1(y)dx + M_2(x)\cdot N_2(y)dy = 0$$

ЗАМЕЧАНИЕ: $y' = \dfrac{dy}{dx}$. Необходимо привести уравнение к уравнению с разделяющимися переменными, т.е. преобразовать его таким образом, чтобы множитель при *dx* содержал только переменную x, а множитель при *dy* – только *y*. Это действие называется разделением переменных.

Пример:

$$(x^2-1)\cdot y' + 2x\cdot y^2 = 0$$

$$y' = \frac{dy}{dx}, \qquad (x^2-1)\cdot\frac{dy}{dx} = -2x\cdot y^2,$$

умножим на $\dfrac{dx}{(x^2-1)\cdot y^2}$ получим:

$$\frac{dy}{y^2} = -\frac{2x}{x^2-1}dx$$

$$-\frac{1}{y} = -ln|x^2-1| + c,$$

$$\frac{1}{y} = ln|x^2-1| + c,$$

$$y = \frac{1}{ln|x^2-1|+c}.$$

Уравнения, приводимые к уравнениям с разделяющимися переменными.

$y' = f(a\cdot x + b\cdot y)$, Замена: $z = a\cdot x + b\cdot y$

Пример:

$$y' = \cos(y-x)$$

$$z = y - x, \qquad z' = y' - 1, \qquad y' = z' + 1$$

$$z' + 1 = \cos z$$

$$z' = \cos z - 1, \qquad z' = \frac{dz}{dx} \qquad \to \qquad \frac{dz}{dx} = \cos z - 1, \qquad \frac{dz}{\cos z - 1} = dx$$

$$-\int\frac{dz}{\cos z - 1} = \int dx + c, \qquad -\int\frac{dx}{2\sin^2\frac{z}{2}} = x + c$$

$$\operatorname{ctg} z = x + c$$

$$\underline{\operatorname{ctg}(y-x) = x + c}.$$

Пример:

$$\left(x+2y\right)\cdot y'=1, \qquad y(0)=-\frac{1}{2} \quad - \quad \text{задача Коши.}$$

$$z=x+2y, \qquad z'=1+2y', \qquad y'=\frac{z'-1}{2}$$

$$z\cdot\frac{z'-1}{2}=1$$

$$z'-1=\frac{2}{z}, \qquad z'=\frac{2}{z}+1=\frac{2+z}{z}, \qquad \frac{z\,dz}{2+z}=dx$$

$$\int\frac{z+2-2}{2+z}dz=\int dx+c$$

$$z-2\ln\left|\,z+2\,\right|=x+c$$

$$x+2y-2\ln\left|\,x+2y+2\,\right|=x+c$$

$$y-\ln\left|\,x+2y+2\,\right|=c \quad - \quad \text{общее решение}$$

$$-\frac{1}{2}-\ln\left|\,0-1+2\,\right|=c, \qquad c=-\frac{1}{2}$$

$$y-\ln\left|\,x+2y+2\,\right|=-\frac{1}{2} \quad - \quad \text{частное решение.}$$

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение дифференциального уравнения первого порядка.
2. Что называется общим и частным решением дифференциального уравнения?
3. В чем заключается задача Коши и каков её геометрический смысл?
4. Какие условия обеспечивают существование и единственность решения задачи Коши?
5. Приведите определение уравнения с разделяющимися переменными.
6. Как решаются дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными?
7. Какой вид имеют интегральные кривые ДУ 1-го порядка?

Рекомендуемая литература:

1. Қасымов Қ., Қасымов Ә. Жоғары математика курсы. Алматы, Санат, 1994
2. Дүйсек А.К., Қасымбеков С.Қ. Жоғары математика. Алматы, ҚБТУ, 2004
3. Айдос Е.Ж. Жоғары математика (қысқаша курс). Алматы, Иль-Тех-Кітап, 2003
4. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики – М.: «Наука». – 1989. – 656 с.
5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, ч.1, М: «Наука». – 1982.
6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия М: «Наука». – 1991.
7. Шипачев В.С. Высшая математика
8. Ефимов Н.В., Краткий курс аналитической геометрии.
9. Махмеджанов Н.М. Жоғары математика.